



książka + aplikacja + interakcja



kup książkę



pobierz aplikację
i wprowadź kod,
który otrzymałeś
z książką



sprawdź co
kryje się pod
znakami AR

Twój kod rabatowy 5 zł:
PROCENTRY2023

Do wykorzystania [w sklepie EduTechnologies](#).

Jak się uczyć?

Zapomnij o nauce na pamięć. Książka jest napisana w sposób zwięzły, z dużą ilością obrazków i rysunków tak, żeby nie było trzeba przez kilka godzin czytać jednego rozdziału. ☺

W zamian za to musisz się naprawdę skupić na tym co czytasz.

Co jest w aplikacji?

W aplikacji, do każdego działu, znajdziesz:

szybka powtórka
do powtórzenia
przed sprawdzianem

sprawdź wyniki
odpowiedzi do
zadań z książki

sprawdź siebie
quiz z zadaniami
do rozwiązania

Zeskanuj kod QR i pobierz aplikację na swój telefon
z odblokowanym rozdziałem 9 - Procenty.



Jak działa rozszerzona rzeczywistość (AR)?

Rozszerzona rzeczywistość "wywoływana" jest przez zeskanowanie telefonem znaku AR umieszczonego w książce. Zeskanowanie znaku sprawi, że na ekranie telefonu wyświetli się jakiś model lub zacnie się odtwarzanie filmu.

9. PROCENTY



Po co nam to?

Procenty to kolejny sposób obliczania **części z całości**.

To bardzo wygodna metoda podawania obniżek, podwyżek, różnic, itp. Dzięki nim sprzedawca nie musi liczyć ceny każdego produktu, wystarczy, że poda ogólną wartość obniżki np. 30%, która dotyczy całego asortymentu. Procenty towarzyszą nam każdego dnia, więc warto łąpać o co w nich chodzi. ☺

Przykłady z życia

Bluza kosztowała 90 złotych, została przeceniona o 20%, ale na metce znajduje się cena 75 złotych. Czy jest to właściwa cena? O ile różni się ona od ceny jaka powinna się znajdować na metce? Na te pytania odpowiesz znając dokładnie działania na procentach.

Nazewnictwo

$100\% = 1 \rightarrow$ jeden (całość)

$50\% = \frac{1}{2} \rightarrow$ jedna druga (połowa)

$25\% = \frac{1}{4} \rightarrow$ jedna czwarta (ćwiartka)

$75\% = \frac{3}{4} \rightarrow$ trzy czwarte



Punkt procentowy

W punktach procentowych przedstawiamy różnicę między dwoma wartościami wyrażonymi w procentach. Na przykład gdy jedna partia dostanie w wyborach 50% głosów, a druga dostanie 20% głosów to różnica między wynikami wynosi **30 punktów procentowych**.

UWAGA! Różnica o 30 punktów procentowych to nie to samo co różnica o 30%!

Zasady działania i wzory

Zamiana % na liczbę i odwrotnie

Skoro $100\% = 1$, to przy zamianie na liczbę należy zabrać dwa zera (przesunąć przecinek o dwa miejsca w lewo, czyli podzielić przez 100) oraz usunąć znaczek %.

Na przykład:

$$1200\% = 12$$

$$120\% = 1,2$$

$$60\% = 0,6$$

$$5\% = 0,05$$

Możemy to opisać taką zależnością:

$$a\% = \frac{a}{100}$$

W drugą stronę – dokładamy dwa zera (przesuwamy przecinek w prawo o dwa miejsca, czyli mnożymy przez 100).

Na przykład:

$$0,3 = 30\%$$

$$10 = 1000\%$$

$$0,71 = 71\%$$

$$0,015 = 1,5\%$$

PROTIP

Zapamiętanie, że $100\% = 1$ to już połowa sukcesu. 😊
Łatwo później zamieniać procenty na liczbę i odwrotnie. Dodatkowo skoro ta równość jest prawdziwa, to znaczy, że procenty są... liczbami 😊 czyli wszystko działa tak samo!

PROTIP

W świecie rzeczywistym **procent** nie występuje nigdy sam - zawsze odnosi się do czegoś.
Czyli jeśli mamy obniżkę o 10%, to odnosi się to do ceny początkowej.

Wykorzystywanie równań i wyrażeń algebraicznych w %

cena spadła
o 20%

zapiszemy →

80% ceny początkowej
bo: $100\% - 20\% = 80\%$

jeżeli cena
początkowa
wynosiła x

zapiszemy →

$80\% x = 0,8 x$
i na ułamki

Obliczanie % z podanej liczby (wartości)

Skoro procent to ułamek, to możemy obliczyć procent z liczby. Po co? Na przykład wiemy, że w naszym 2 litrowym soku jest 7% substancji konserwujących i chcemy wiedzieć ile to litrów z całego soku. Czyli:

$$7\% \cdot 2\text{ l}$$

1) Zapisujemy działanie w postaci **procent · liczba**.

$$\frac{7}{100} \cdot 2000\text{ ml}$$

2) Zamieniamy % na liczbę, żeby mieć wynik bez %.
Zamieniamy jednostki, żeby dobrze się liczyło i skracamy.

$$7 \cdot 20\text{ ml} = 140\text{ ml}$$

3) Zapisujemy po skróceniu, mnożymy i gotowe. 8-)

A czemu producent nie może od razu napisać ile mililitrów tych substancji jest w soku?

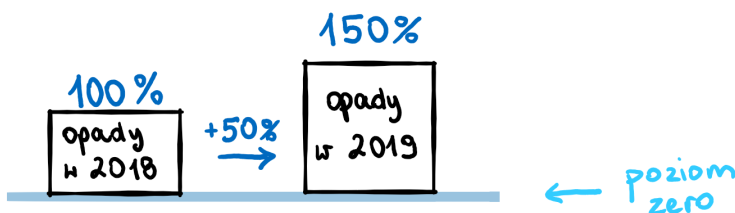
Bo zarówno dla 2 litrów, 10 litrów jak i 250 mililitrów soku będzie to 7%, natomiast wartość w mililitrach będzie już inna. Czyli jest to wygodniejsze dla niego, bo nie trzeba liczyć dla każdej objętości, a my możemy sami policzyć wtedy, kiedy potrzebujemy. ☺



Zwiększanie lub zmniejszanie o dany %

Opady w 2019 wzrosły o 50% w stosunku do roku 2018.

Jak to rozumiemy?



Czyli gdy w 2018 spadło 250 mm opadów, to w 2019 było $150\% \cdot 250\text{ mm}$ opadów.



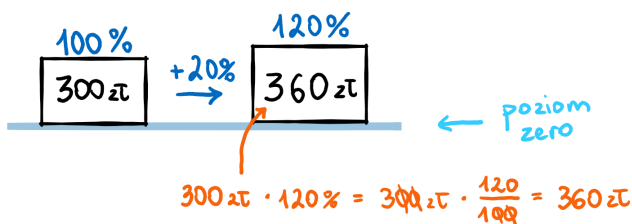
PROTIP

Procenty zamieniamy na ułamki zwykłe lub dziesiętne w zależności od innych liczb. Tutaj chcieliśmy wygodnie poskracać, więc wybraliśmy ułamek zwykły.

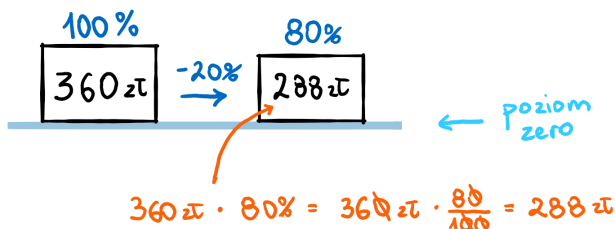
Jeżeli zwiększamy lub zmniejszamy liczbę o jakiś procent, to zawsze „wychodzimy” od 100%, bo tyle było na początku przed podwyżką lub obniżką.

Podwyżka, a potem obniżka

Cena kurtki wzrosła z 300 zł o 20%, a następnie spadła o 20%.
Jak to rozumiemy?



Po pierwszej podwyżce, nowa cena jest nowym poziomem początkowym, czyli nowym 100%.



Uwaga! Pomimo takiej samej podwyżki i obniżki, cena nie będzie taka sama jak na początku!

Obliczanie całości, jeżeli znamy tylko jej %

Przeszliśmy 2 km i jest to 40% całej drogi. Chcemy poznać długość całej trasy.
Jak to robimy?

$$\frac{2 \text{ km}}{40\%}$$

Dzielimy liczbę przez
odpowiadającą jej %

$$\frac{2 \text{ km}}{0,4}$$

Zamieniamy % na liczbę

$$\frac{20}{4} \text{ km} = 5 \text{ km}$$

Skracamy i obliczamy

Obliczanie jakim % jednej liczby jest druga

Cena spodni spadła o 20 zł, a ich początkowa cena wynosiła 160 zł.
Jakim procentem początkowej ceny była obniżka?
Jak to rozumiemy?

na górze to
czego liczymy %

$$\frac{20 \text{ zł}}{160 \text{ zł}} \cdot 100\% = \frac{20 \cdot 100\%}{160} = \frac{100}{8} \% = 12,5\%$$

później już tylko skracamy
i obliczamy

na dole to
do czego się
odnosimy

i mnożymy przez 100%
żeby uzyskać wynik w %



Metoda na krzyż, a %%%

Metodę na krzyż możemy zastosować praktycznie przy każdym obliczeniu. ☺ Poniżej pokazujemy zastosowanie tej metody w procentach. Wiemy, że w naszym 2 litrowym soku jest 7% substancji konserwujących i chcemy wiedzieć ile to litrów z całego soku.

PROTIP
Sprawdź
dokładniej jak to
działa w dziale
„Proporcje i
metoda na krzyż”!

$$\begin{array}{rcl} 100\% & - & 2000 \text{ ml} \\ 7\% & - & x \end{array}$$

Zapisujemy dane
według schematu
metody „na krzyż”.

$$100\% \cdot x = 7\% \cdot 2000 \text{ ml}$$

Mnożymy „na krzyż”.

$$x = \frac{7\% \cdot 2000 \text{ ml}}{100\%}$$

Skracamy % i zera.

$$x = 140 \text{ ml}$$

Obliczamy wynik końcowy.

Przykłady

1. Zamień procent na liczbę i odwrotnie.

$$1,23 = 123\%$$

$$0,0706 = 7,06\%$$

$$0,15\% = 0,0015$$

$$4567,8\% = 45,678$$

2. Zadania tekstowe:

- a) Cena bluzki spadła o 20% i teraz jest równa cenie trzech par skarpetek. Jeżeli jedna para skarpetek kosztuje 15 zł, to ile kosztowała bluzka przed obniżką.

$$\begin{array}{c} \text{cena bluzki przed obniżką} \\ \swarrow \\ 0,8x = 3 \cdot 15 \text{ zł} \\ \nwarrow \quad \uparrow \\ \text{cena po obniżce} \quad \text{jest równa} \quad \text{cenie trzech par skarpetek} \end{array}$$

$$0,8x = 45 \text{ zł} \quad / : 0,8$$

$$x = \frac{45}{0,8} \text{ zł} = \frac{450}{8} \text{ zł} = 56,25 \text{ zł}$$

- b) U ludzi dorosłych krew stanowi około 8% masy ciała. Ile waży człowiek, którego krew waży 6,56 kg?



- c) Po sezonie cena kurtki narciarskiej spadła o 10%, a później o kolejne 10%. Jeżeli po drugiej obniżce kosztowała 364,5 zł, to ile kosztowała kurtka w sezonie?

$$\begin{aligned}
 &100\% \quad x \quad \rightarrow \quad 90\% \cdot x \quad \rightarrow \quad 90\% \cdot (90\% \cdot x) \\
 &\text{w sezonie} \quad \text{pierwsza} \quad \text{druga} \\
 &\text{(początkowa)} \quad \text{obniżka} \quad \text{obniżka} \\
 &\text{cena kurtki)} \\
 &0,9 \cdot 0,9 x = 364,5 \text{ zł} \\
 &0,81 x = 364,5 \text{ zł} \quad / : 0,81 \\
 &x = 450 \text{ zł}
 \end{aligned}$$

Uwaga! Jeżeli mamy podwyżki lub obniżki wyrażone w procentach, to nigdy nie dodajemy ich do siebie, bo każda kolejna zmiana jest względem nowej ceny, czyli już tej po pierwszej zmianie.

Jeżeli zrobimy kilka obniżek o 10%, to wygląda to tak:

$$0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9x = 200 \text{ zł}$$

d) Ile mamy czystej soli w trzech kilogramach solanki o stężeniu 2,4%?



3. Złożone zadanie tekstowe:

- Mama upiekła ciasto. Twój kolega zjadł $37\frac{2}{3}\%$ ciasta.
Jaka część zostanie dla Ciebie?

$$100\% - 37\frac{2}{3}\% = 62\frac{1}{3}\%$$

- Jeżeli ciasto ważyło 600 g, to ile gramów zjesz Ty, a ile Twój kolega?

Ty zjesz:

$$62\frac{1}{3}\% \cdot 600\text{g} = \frac{187}{3}\% \cdot 600\text{g} = \frac{187}{300} \cdot 600\text{g} = 187 \cdot 2\text{g} = 374\text{g}$$

A Twój kolega resztę, czyli:

$$600\text{g} - 374\text{g} = 226\text{g}$$

- Jeżeli zjesz tylko 100 g, to ile będzie to procentowo w stosunku do tego co zjadł Twój kolega? Podaj w przybliżeniu do części setnych.

$$\frac{100\text{g}}{226\text{g}} \cdot 100\% = \frac{5000}{113}\% = 44,247\% \approx 44,25\%$$

$$\begin{array}{r} 44,247... \\ 5000 : 113 \\ - 452 \\ \hline 480 \\ - 452 \\ \hline 280 \\ - 226 \\ \hline 540 \\ - 452 \\ \hline 880 \\ - 791 \\ \hline \dots \end{array}$$

Tutaj nie opłaca się robić metody na krzyż, bo szybciej dojdziemy do tego samego robiąc normalne obliczenia!

- Okazało się, że mama zrobiła drugie ciasto, które było większe. 100g, które zjadłeś stanowiłoby tylko 16% większego ciasta.
Ile ważyło drugie ciasto? *Próbujemy metodą na krzyż!*

$$\begin{array}{rcl}
 100\text{g} & - & 16\% \\
 x & - & 100\%
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 100\text{g} \cdot 100\% = x \cdot 16\% \\
 x = \frac{100 \cdot 100}{16} \text{ g} \\
 x = 625 \text{ g}
 \end{array}$$

4. Użycie metody „na krzyż”:

Idziesz do sklepu, gdzie wywieszono baner ogłaszający, że w tym tygodniu zniżki wynoszą 25%. Na szczęście twoja koleżanka pracuje w tym sklepie i mówiła Ci, że w przyszłym tygodniu promocje będą wynosiły 40%. Jeżeli upatrzona sukienka kosztuje teraz 90 zł (po zniżce 25%), to ile będzie kosztować w przyszłym tygodniu?

$$\begin{array}{l}
 100\% - 25\% = 75\% \quad \text{- cena teraz} \\
 100\% - 40\% = 60\% \quad \text{- cena w przyszłym tygodniu}
 \end{array}$$

metoda „na krzyż”

$$\begin{array}{rcl}
 90 \text{ zł} & - & 75\% \\
 x & - & 60\%
 \end{array}$$

$$90 \text{ zł} \cdot 60\% = x \cdot 75\% \quad / : 75$$

$$\frac{90 \cdot 60}{75} \text{ zł} = x$$

$$x = 72 \text{ zł}$$

standardowe obliczenia

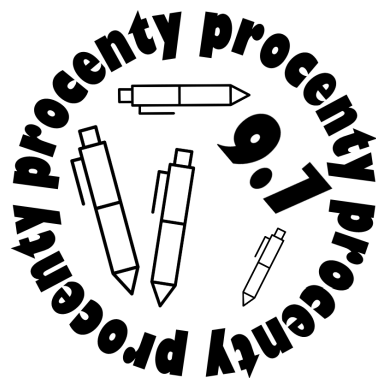
$$\begin{array}{l}
 75\% \cdot x = 90 \text{ zł} \\
 0,75 x = 90 \text{ zł} \quad / : 0,75 \\
 x = 120 \text{ zł} \\
 60\% \cdot 120 \text{ zł} = x \\
 0,6 \cdot 120 \text{ zł} = x \\
 x = 72 \text{ zł}
 \end{array}$$

Zadania

Zadania z lekcji

1. Zamień:

na liczbę	na %
a) 11,7%	e) 2,5
b) 1001%	f) 0,1567
c) 152,5%	g) 12,34
d) 0,1%	h) 0,0102



2. Zadania tekstowe:

- a) O ile złotych obniżono cenę, jeżeli wiadomo, że obniżka wynosiła 15%, a początkowa cena 120 zł?
- b) Jeżeli masz w skarbonce 26 zł, a upatrzony aparat fotograficzny kosztuje 284 zł, to jaki % z całości już masz? Zaokrąglaj wynik do drugiego miejsca po przecinku.
- c) Mama robi ciasto na święta. Przy robieniu jednego ciasta, 40% z całej wagi musi stanowić mąka. Mama ma 200 g mąki. (czyli 40% to 200g)
 - Ile będzie ważyło jej ciasto?
 - Ile będą ważyć dwa takie ciasta i jaki będzie % mąki w każdym z nich?
- d) Rok temu w szkole były 52 dziewczynki co stanowiło 65% wszystkich uczniów. W tym roku jest o 8 dziewczynek więcej, a liczba chłopców się nie zmieniła. Ile % chłopców było rok temu w tej szkole, a ile jest teraz?
- e) Kurtka z nowej kolekcji kosztowała 250 zł, a po sezonie cena została obniżona o 35%. Ile kosztuje kurtka? Ile kosztowałaby kurtka, jeśli cena wzrosłaby później o 10%?
- f) Ile zarobisz po roku, a ile po dwóch latach, jeżeli wpłacasz na lokatę 2000 zł, a oprocentowanie jej wynosi 4,5% w skali roku?
Czy oprocentowanie zmieni się po wpłaceniu 1500 zł?
- g) Stężenie pewnego roztworu wodnego soli wynosi 5%.
Ile kilogramów czystej wody należy dodać do 90 kg tego roztworu, aby otrzymać roztwór o stężeniu 2%?
- h) 30% pewnego towaru sprzedano z zyskiem 15-procentowym, a pozostałą część z zyskiem 10-procentowym. Jaki był ogólny zysk ze sprzedaży?
- i) Po dwukrotnej obniżce ceny towaru, za każdym razem o ten sam procent, jego cena końcowa stanowi 64% ceny pierwotnej.
O ile procent dokonywano każdorazowo obniżki ceny towaru?

Zadania życiowe

1. Janek dostał na urodziny 120 złotych. Buty do gry w piłkę, które chciałby mieć kosztują 160 zł. O ile % muszą zostać przecenione, żeby Janek mógł je kupić? Jeżeli mama dorzuci mu jeszcze szesnaście złotych, a buty będą przecenione o 10%, to starczy mu pieniędzy, aby kupić te buty?

Notatki własne